



TITLE:

Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces

AUTHOR(S):

武田, 好史

CITATION:

武田, 好史. Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces. 数理解析研究所講究録 1990, 713: 79-94

ISSUE DATE:

1990-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101715>

RIGHT:

Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces

阪大理 武田 好史 (Yoshifumi Takeda)

K を標数 $p > 0$ の体とし、 L をその拡大体とする。拡大 L/K が Galois 拡大でその Galois 群が p 次巡回群に同型であるとき、 L/K は Artin-Schreier 拡大であるという。このとき L は K の単純拡大 $L = K(\xi)$ でその関係式は $\xi^p - \xi = f$ ($f \in K$) と与えられることが知られている。Artin-Schreier 拡大の興味ある事実として次のものがある。 k を正標数 p の代数的閉体として k 上のアフィン空間 $A_k^n = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n]$ 及びアフィン多様体 $X = \text{Spec } k[x_1, \dots, x_n, \xi] / (\xi^p - \xi - f)$, ($f \in k[x_1, \dots, x_n]$) を考える。 $\xi^p - \xi - f$ が既約となるように f をとれば、関数体の拡大 $k(X)/k(A^n)$ は Artin-Schreier 拡大であり、射影 $\pi: X \rightarrow A^n$ は p 次のエタールな有限射となる。すなわち、アフィン空間の基本群の自明でない元の関数体の拡大の1つの例が Artin-Schreier 拡大である。

以下では、正標数 p の代数的閉体 k を基礎体とする。

X を k 上の非特異代数曲面とし、 Y を正規代数曲面とする。

定義. Y から X の上への有限射 $\pi: Y \rightarrow X$ が Artin-Schreier 被覆 (以下 AS 被覆と略称する) とは、関数体の拡大 $k(Y)/k(X)$ が Artin-Schreier 拡大のときにいう。

AS 被覆に関して次の問題が考えられる。

問題. $\pi: Y \rightarrow X$ が AS 被覆であるとき、 X のアフィン開被覆 $\{U_\lambda\}$ と元 $a_\lambda, t_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して、 $\pi^{-1}(U_\lambda) = \text{Spec } \mathcal{O}_X(U_\lambda)[\xi_\lambda]/(\xi_\lambda^p - a_\lambda^{p-1}\xi_\lambda - t_\lambda)$ と表せるか？

答え. $p=2$ では正しいが、 $p \geq 3$ では反例がある。

本稿では、 $p \geq 3$ でも上の問題が肯定的であるような AS 被覆のクラスとして単純型 AS 被覆を定義し、その性質を調べ、さらに無限遠直線で分岐しているアフィン平面の一般の AS 被覆を調べることを目標とする。

§1. 単純型 Artin-Schreier 被覆

AS 被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ に関して基本的な次の補題がある。

補題 1.1. $\pi_* \mathcal{O}_Y$ には $\text{Gal}(\mathbb{k}(Y)/\mathbb{k}(X))$ の作用からきまる次の自然なフルトレーションがある：

$$\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \pi_* \mathcal{O}_Y$$

- s.t. (1) 各 \mathcal{F}_i は階数 $i+1$ の局所自由 \mathcal{O}_X -加群である。
 (2) $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_0$ は可逆層で、 $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ ($1 \leq i \leq p-1$) は階数 1 のトーションフリーな層である。

証明. まず局所的に考える。X のアフィン開部分集合 $U = \text{Spec } R$ をとり、 $\pi^{-1}(U) = \text{Spec } A[Y]$ とする。また $G = \text{Gal}(\mathbb{k}(Y)/\mathbb{k}(X))$ を群スキーム $G = \text{Spec } \mathbb{k}[Z]$ として表す。ここで $Z^p = Z$ であり、 G の群構造は、余積 $\Delta(Z) = Z \otimes 1 + 1 \otimes Z$ 、余単位元 $\varepsilon(Z) = 0$ で与えられているとする。 $\pi^{-1}(U)$ は G -安定であるからその余作用 $\sigma: A \rightarrow A[Z]$ がある。 $a \in A$ に対して $\sigma(a) = \sigma_0(a) + \sigma_1(a)Z + \cdots + \sigma_{p-1}(a)Z^{p-1}$ と書くとき、 $(1 \otimes \varepsilon)\sigma = \text{id}_A$ 及び $(\sigma \otimes 1)\sigma = (1 \otimes \Delta)\sigma$ が成立することから計算により、 $\sigma_0 = \text{id}_A$ 、 $\sigma_i = (1/i!) \delta^i$ ($1 \leq i \leq p-1$) が得られる。ここで $\delta = \sigma_1$ である。 A の \mathbb{k} -部分加群 F_i ($0 \leq i \leq p-1$) を $F_i = \{a \in A \mid \delta^{i+1}(a) = 0\}$ で定義する。 G の

A への作用が自明でないことから $F_i \neq F_{i-1}$ がわかる。また $F_i \subset A$ であるから F_i はトーショナルフリーであることがわかる。さらに、 π により F_i/F_{i-1} は $(A + Az + \dots + Az^i)/(A + Az + \dots + Az^{i-1}) \cong A$ の部分加群とみることができ、 F_i/F_{i-1} もトーショナルフリーである。各 F_i を層化してはり合せてできた X 上の連接層を \mathcal{F}_i とすると、 $\pi_* \mathcal{O}_Y$ のフィルトレーション $\mathcal{O}_X = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \pi_* \mathcal{O}_Y$ が得られる。各 \mathcal{F}_i の二重双対 $\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$ を考えると、 $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X^{\vee\vee} = \mathcal{F}_0^{\vee\vee} \subset \mathcal{F}_1^{\vee\vee} \subset \dots \subset \mathcal{F}_{p-1}^{\vee\vee} = (\pi_* \mathcal{O}_Y)^{\vee\vee}$ となる。一方 Y は Cohen-Macaulay スキームであり、 X は正則であるから π は平坦射である。従って $\pi_* \mathcal{O}_Y$ は局所自由な \mathcal{O}_X -加群となり $\pi_* \mathcal{O}_Y^{\vee\vee} = \pi_* \mathcal{O}_Y$ がわかる。よって $\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$ は $\pi_* \mathcal{O}_Y$ の部分層とみることができて、 δ は $\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$ に作用している。つまり δ^{2i+1} は $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_* \mathcal{O}_Y)$ の X 上の断面になっている。ここで $\mathcal{F}_i^{\vee\vee}$ は局所自由 \mathcal{O}_X -加群であるから $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_* \mathcal{O}_Y)$ も局所自由 \mathcal{O}_X -加群である。また \mathcal{F}_i はトーショナルフリーで X は正則であるから、 $V = X - \text{Supp}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}/\mathcal{F}_i)$ とすると $\text{codim } V \geq 2$ となる。 \mathcal{F}_i の定義により $\delta^{2i+1}|_V = 0$ であるから、 δ^{2i+1} は X 上の $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}, \pi_* \mathcal{O}_Y)$ の断面として 0、つまり $\delta^{2i+1}(\mathcal{F}_i^{\vee\vee}) = 0$ である。従って $\mathcal{F}_i^{\vee\vee} = \mathcal{F}_i$ となり \mathcal{F}_i は局所自由 \mathcal{O}_X -加群であることがわかる。

最後に $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_0$ が可逆層であることをみる。完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

を考える。各点 $P \in X$ に対して $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{O}_P$ は $(\pi_X^* \mathcal{O}_Y) \otimes \mathcal{O}_P$ の単位元を含んでいるから $\mathcal{F}_0 \otimes \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{O}_P$ は単射である。従って $(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0) \otimes \mathcal{O}_P$ の階数は常に 1 となり、 $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0$ は可逆層であることがわかる。(証明終り)

単純型 A S 被覆を次のように定義する。

定義. A S 被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ が単純型であるとは、補題 1.1. のフルトレーションで $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1} \cong (\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0)^{\otimes i}$ ($1 \leq i \leq p-1$) が成り立つときという。

定義より、 $p=2$ のときは A S 被覆はつねに単純型である。この単純型 A S 被覆については最初に述べた問題の答えは肯定的となる。すなわち次の補題が成立する。

補題 1.2. 単純型 A S 被覆 $\pi: Y \rightarrow X$ に対して、 X のアフィン開被覆 $\{U_\alpha\}$ と元 $s_\alpha, t_\alpha \in \mathcal{O}_X(U_\alpha)$ が存在して、

$$\pi^{-1}(U_\alpha) = \text{Spec } \mathcal{O}_X(U_\alpha)[\xi_\alpha] / (\xi_\alpha^p - s_\alpha^{p-1} \xi_\alpha - t_\alpha)$$

と表せる。さらにこのとき $\{s_\alpha\} \in H^0(X, \mathcal{L})$ となる。ただし $\mathcal{L} = (\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_0)^{-1}$ である。

証明. X のアフィン開被覆 $\{U_\lambda\}$ を $\mathcal{O}|_{U_\lambda} \cong \mathcal{O}_{U_\lambda}$ とするよう
 にとる。元 $\xi_\lambda \in \mathcal{F}_1(U_\lambda)$ をその $\mathcal{O}^\perp(U_\lambda)$ への像が $\mathcal{O}^\perp|_{U_\lambda}$ の生
 成元となるようにとる。このとき元 $\lambda_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して
 $\sigma(\xi_\lambda) = \xi_\lambda + \lambda_\lambda Z$ となる。ここで σ と Z は補題 1.1 の証明と同
 じものである。 $\sigma(\xi_\lambda^p) = (\xi_\lambda + \lambda_\lambda Z)^p = \xi_\lambda^p + \lambda_\lambda^p Z$ であるか
 ら $\xi_\lambda^p \in \mathcal{F}_1(U_\lambda)$ となり、従って元 $\lambda'_\lambda, t_\lambda \in \mathcal{O}_X(U_\lambda)$ が存在して
 $\xi_\lambda^p = \lambda'_\lambda \xi_\lambda + t_\lambda$ とできる。一方 $\pi: Y \rightarrow X$ が単純型である
 という仮定により $\pi_* \mathcal{O}_Y|_{U_\lambda} = \mathcal{O}_{U_\lambda} + \mathcal{O}_{U_\lambda} \xi_\lambda + \cdots + \mathcal{O}_{U_\lambda} \xi_\lambda^{p-1}$ となるか
 ら、 $\pi^{-1}(U_\lambda) = \text{Spec } \mathcal{O}_X(U_\lambda)[\xi_\lambda]/(\xi_\lambda^p - \lambda'_\lambda \xi_\lambda - t_\lambda)$ であることが
 わかる。さらに $\sigma(\xi_\lambda^p) = \xi_\lambda^p + \lambda_\lambda^p Z = \sigma(\lambda'_\lambda \xi_\lambda + t_\lambda) = \lambda'_\lambda(\xi_\lambda +$
 $\lambda_\lambda Z) + t_\lambda$ であったから、 $\lambda_\lambda^p = \lambda'_\lambda \lambda_\lambda$ すなわち $\lambda'_\lambda = \lambda_\lambda^{p-1}$ がわか
 る。 $\{\alpha_{\lambda\mu}\}$ を \mathcal{O} の変換関数とすると、コサイクル $\{b_{\lambda\mu}\} \in$
 $H^1(X, \mathcal{O})$ が存在して、 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上 $\xi_\mu = \alpha_{\lambda\mu} \xi_\lambda + b_{\lambda\mu}$ となる。
 従って $\sigma(\xi_\mu) = \xi_\mu + \lambda_\mu Z = \sigma(\alpha_{\lambda\mu} \xi_\lambda + b_{\lambda\mu}) = \alpha_{\lambda\mu}(\xi_\lambda + \lambda_\lambda Z)$
 $+ b_{\lambda\mu} = \alpha_{\lambda\mu} \xi_\lambda + \alpha_{\lambda\mu} \lambda_\lambda Z + b_{\lambda\mu}$ これから $\lambda_\mu = \alpha_{\lambda\mu} \lambda_\lambda$ が
 得られる。(証明終り)

定義 補題 1.2 の記号の下で、 $\{\lambda_\lambda\} \in H^0(X, \mathcal{O})$ に対応す
 る非負因子を B と書き、 π の分岐因子と呼ぶ。

単純型 AS 被覆については、そのいくつかの不変量を B

を用いて表すことができる。たとえば次の補題は随伴公式及び Riemann-Roch の定理により容易に示される。

補題 1.3. $\pi: Y \rightarrow X$ を単純型 AS 被覆、 B をその分岐因子とすると次の公式が成り立つ：

$$(1) \quad K_Y = \pi^*(K_X + (p-1)B),$$

$$(2) \quad \chi(\mathcal{O}_Y) = p \left\{ \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{p-1}{4} (K_X, B) + \frac{(p-1)(2p-1)}{12} (B^2) \right\}.$$

単純型 AS 被覆としてどのような曲面が構成できるかというのは興味ある問題の一つである。これに関して次の結果がある。

定理 1.4. $\pi: Y \rightarrow X$ を単純型 AS 被覆、 B をその分岐因子とする。 Y が非特異曲面であり、 B が既約で豊富な因子であるとき、 (X, Y) は次のように分類される。

(1) $p \geq 5$ のとき、 Y は常に極小な一般型代数曲面である。

(2) $p=3$ のとき、(i) $X = \mathbb{P}^2$, Y : 次数 3 の del Pezzo 曲面;

(ii) $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Y : 極小な K3 曲面;

(iii) X : 相対的に極小な線織曲面,

Y : $K=1$ の極小な楕円曲面;

(iv) (i), (ii), (iii) 以外 のとき、 Y は極小な一般

型代数曲面である。

- (3) $p=2$ のとき、
- (i) $X = \mathbb{P}^2$, $Y = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
 - (ii) $X = \mathbb{P}^2$, Y : 次数2の del Pezzo 曲面;
 - (iii) X : 相対的に極小な線織曲面,
 Y : 線織曲面;
 - (iv) X : del Pezzo 曲面, Y : 極小な K3 曲面;
 - (v) X : 線織曲面, Y : $K=1$ の極小な楕円曲面;
 - (vi) (i)~(v) 以外するとき、 Y は極小な一般型代数曲面である。

証明略 ([1] 参照)。

§2. A^2 の Artin-Schreier 被覆

代数曲面 X から $A^2_{\mathbb{F}_p}$ の上へのエタールな有限射 $\varphi: X \rightarrow A^2_{\mathbb{F}_p}$ で関数体の拡大 $k(X)/k(A^2)$ が p 次の Galois 拡大になっているものを考える。 (u, v) を A^2 の座標とすると、多項式 $f(u, v) \in k[u, v]$ が存在して $X = \text{Spec } k[u, v, \xi]/(\xi^p - \xi - f)$ と書けることが知られている。 $A^2_{\mathbb{F}_p} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ と見て、 \mathbb{P}^2 の $k(X)$ での正規化 $\pi:$

$\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ をとると、これはAS被覆となる。この被覆は一般には単純型とは限らない。この節では単純型でない場合も含めた考察を行ない、 $\tilde{\mathcal{X}}$ の特異点の極小な解消 $\rho: \mathcal{Y} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ を取り \mathcal{Y} の数値的不変量等を調べる。以下では \mathcal{X} に対して上記の多項式 $f(s, t)$ は次数がもっとも小さくなるものとする。 \mathbb{P}^2 の各座標 (X, Y, Z) を $s = X/Z, t = Y/Z$ となるようにとり、 \mathbb{P}^2 のアフィン開被覆 $U_X = \{X \neq 0\}, U_Y = \{Y \neq 0\}, U_Z = \{Z \neq 0\}$ とおく。また無限遠直線 $\mathbb{P}^2 - U_X$ を L と書くことにする。Gorenstein スキーム $\bar{\mathcal{X}}$ と、有限射 $\psi: \bar{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ を次のように定義する:

$$\psi^{-1}(U_Z) = \text{Spec } k[s, t, \xi] / (\xi^p - \xi - f) = \tilde{\mathcal{X}},$$

$$\psi^{-1}(U_Y) = \text{Spec } k[x, z, \eta] / (\eta^p - z^{m(p-1)}\eta - z^e \tilde{f}(x, 1, z)),$$

$$\psi^{-1}(U_X) = \text{Spec } k[u, v, \zeta] / (\zeta^p - v^{m(p-1)}\zeta - v^e \tilde{f}(1, u, v)),$$

ここで $\eta = (Z/Y)^m \xi, \zeta = (Z/X)^m \xi, x = X/Y, z = Z/Y, u = Y/X$

$v = Z/X, d = \deg f(s, t), \tilde{f}(X, Y, Z) = Z^d f(X/Z, Y/Z),$

$d + e = mp$ ($e, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq e < p$) である。

注意 2.1. $\bar{\mathcal{X}}$ は一般には正規ではないが $\psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}$ にはフィルトレーション $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{p-1} = \psi_* \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}$ が存在する。ここで各 \mathcal{F}_i は U_Z, U_Y, U_X 上それぞれ $\{1, \xi, \dots, \xi^{i-1}\}, \{1, \eta, \dots, \eta^{i-1}\}, \{1, \zeta, \dots, \zeta^{i-1}\}$ で生成されていて、 $\mathcal{F}_i / \mathcal{F}_{i-1} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-im)$ となる。

注意 2.2. $\bar{\pi}$ は $\bar{\pi}$ の正規化である。従って、 $\bar{\pi}$ が正規
のとき $\pi: \bar{\pi} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は単純型 AS 被覆である。

注意 2.3. $\chi(\mathcal{O}_{\bar{\pi}}) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2$ 。

I. $\deg f \equiv 0 \pmod{p}$ の場合

多項式 $f(x, t)$ とその齊次化 $\hat{f}(x, y, z)$ について次の仮定を考え
る。

仮定 A: $\deg f(x, t) \equiv 0 \pmod{p}$ であつ、各 $P \in L$ に対して
 $(\frac{\partial}{\partial x} \hat{f}, \frac{\partial}{\partial y} \hat{f}, \frac{\partial}{\partial z} \hat{f})(P) \neq (0, 0, 0)$ 。

仮定 A を満たす多項式 f により $\bar{\pi}$ が $\text{Spec } k[x, t, \xi]/(\xi^p - \xi - f)$
と書けているとき、 $\varphi: \bar{\pi} \rightarrow A^2$ は仮定 A を満たすという。ヤ
コビアン判定法により次の命題が得られる:

命題 2.4. $\varphi: \bar{\pi} \rightarrow A^2$ は仮定 A を満たし、 $(p, m) \neq (2, 1)$ で
あるとする。このとき $\bar{\pi}$ は非特異である。とくに $\bar{\pi}$ は正
規であり、 $\bar{\pi} = \bar{\pi} = \mathcal{O}_{\bar{\pi}}$ が成り立ち、 $\pi \circ \rho: \mathcal{O}_{\bar{\pi}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は単純型 AS 被
覆である。

系 2.5. 命題と同じ仮定の下で

$$\chi(\mathbb{G}_m) = p - \frac{3}{4} p(p-1)m + \frac{1}{12} p(p-1)(2p-1)m^2.$$

II. $\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ の場合

このとき $e=1$ となる。ヤコビアン判定法及び Serre の判定法により次が従う：

補題 2.6. $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^2$ が $\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ であるような多項式 f により表されているとき、 \mathcal{X} は正規である。さらに各 $P \in \mathbb{P}^2$ に対して次が成立する：

$$\varphi^{-1}(P) \text{ が特異点} \iff P \in \{ \hat{f}(X, Y, Z) = 0 \} \cap \mathcal{L}.$$

注意 2.2 より $\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}}$ となり、 $\pi: \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は単純型 A/S 被覆である。多項式 $f(u, v)$ についての次の仮定を考える。

仮定 B: $\deg f \not\equiv 0 \pmod{p}$ でありかつ、曲線 $\{ \hat{f}(X, Y, Z) = 0 \}$ は既約曲線で \mathcal{L} と正規交叉する。

命題 2.7. $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{A}^2$ は仮定 B をみたし、 $\deg f \equiv p-1 \pmod{p}$ であるとする。このとき \mathcal{X} は特異点として丁度 d 個

の A_{p-1} 型有理二重点のみをもつ。

証明. 前の補題より $\bar{\pi} = \tilde{\pi}$ となりまた $\text{Sing}(\tilde{\pi})$ は $\{f=0\} \cap L$ 上にある。 $P \in \{f=0\} \cap L$ をとる。このとき $P = (x=0, z=0) \in U_Y$ として一般性を失わない。 f は仮定 B をみたすから、 $\pi^{-1}(P)$ の近傍では $\tilde{\pi}$ は $\eta^p - z^{m(p-1)}\eta = zx + (\text{高次の項})$ により定義されている。この式より $\pi^{-1}(P)$ は A_{p-1} 型有理二重点であることがわかる。 (証明終り)

系 2.8. 命題と同じ仮定の下で

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2.$$

証明. $\tilde{\pi}$ は有理特異点のみをもつことから $\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_{\tilde{\pi}})$ ができる。 $\tilde{\pi} = \bar{\pi}$ であったから注意 2.3 より結果を得る。

III. $\deg f \neq 0, p-1 \pmod{p}$ の場合

このとき必然的に $p \geq 3$ となり、 $2 \leq e \leq p-1$ となる。ヤコビアン判定法及び Serre の判定法により、 $\bar{\pi}$ は正則ではなく、 $\pi: \tilde{\pi} \rightarrow \mathbb{P}^2$ は単純型でない AS 被覆となる。そこで次の \mathbb{P}^2 上の完全列を考える:

$$0 \longrightarrow \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

このとき $\text{Supp } \mathcal{H} = L$ である。一方、注意 2.1 のフィルトレーションより $H^1(\mathbb{P}^2, \psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})$ が容易に示される。従って $H^1(L, \mathcal{H}) = 0$ となり、 \mathcal{H} はトーションフリー層、よりくわしく L 上の局所自由 \mathcal{O}_L -加群であることがわかる。以下では、 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{A}^2$ は仮定 B をみたし、かつ $\deg f \not\equiv 0, p-1 \pmod{p}$ であると仮定して \mathcal{H} を決定する。

まず、 $P \in L - \{f=0\}$ なる点をとる。 $P \in U_Y$ であるとして一般性を失わない。このとき \tilde{X} は $\psi^{-1}(P)$ の近くで $\eta^p - Z^{m(p-1)}\eta - Z^e \tilde{f}(x, 1, z) = 0$ により定義されている。 $H = \tilde{f}(x, 1, z) + Z^{m(p-1)-e}$ とおくと、 $\eta^p = Z^e H$, $H(P) \neq 0$ となる。 p と e は互いに素であるから整数 a と b が存在して $ap + be = 1$ とできる。ここで $-e < a < 0$ としてよい。 $Z = \eta^b Z^a$ とおくと、 $Z \in k(x)$ であり、 $Z^e = \eta H^{-a}$, $Z^p = Z H^b$ となる。従って、 $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_P = (\psi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})_P[Z]$ となり、 \tilde{X} は $\pi^{-1}(P)$ で非特異であることがわかる。また $n = -\alpha p + \beta e$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$) に対して $Z^n = Z^{-\alpha} \eta^\beta H^{-\alpha b - \beta a}$ である。このことに注意すると容易に $\mathcal{H}_P = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{L, P} Z^{-\alpha} \eta^\beta$ であることが確かめられる。但し、 α と β は $-\alpha p + \beta e > 0$, $0 < \alpha < e$, $0 < \beta < p$ なる整数全体を渉る。

次に、 $L \cap \{f=0\}$ 上での \mathcal{H} を調べる。 $L \cap \{f=0\} \subset U_X$ として一般性を失わない。 $Q \in L \cap \{f=0\}$ をとる。 $\psi^{-1}(Q)$ の近くで

\tilde{z} は $\tilde{z}^p - v^{mp-1}\tilde{z} - v^e \tilde{f}(1, u, v) = 0$ によって定義されている。

$G = \tilde{f}(1, u, v) + v^{mp-1-e}\tilde{z}$ とすると $\tilde{z}^p = v^e G$ でさらに f は仮定 B を満たすから Q は G の 1 位の零点となる。従って Q の上にある特異点を見るには $\tilde{z}^p = v^e u$ で定義された曲面の正規化を考えればよい。 $T^p = v$, $S = \tilde{z}/T^e$ とおく。このとき $S^p = u$ となる。 $k = p - e$ として $k[[S, T]]$ 上の導分 $D = T \frac{\partial}{\partial T} + kS \frac{\partial}{\partial S}$ 及びその不変環 $k[[S, T]]^D = \{g \in k[[S, T]] \mid D(g) = 0\}$ を考える。 $k[[S, T]]^D$ は正規環である。よりくわしく多項式環についての次の補題がある。

補題 2.8. $A = k[[T, S]] \cap k(T^p, S^p, S/T^k)$, $D = T \frac{\partial}{\partial T} + kS \frac{\partial}{\partial S}$ とおく。このとき次が成り立つ。

(i) $A = k[[T, S]]^D$ でさらに $\text{Spec } A$ は $(S=0, T=0)$ に孤立特異点をもつ。

(ii) $\{S^\alpha T^\beta \mid \beta + k\alpha \equiv 0 \pmod{p}\}$ は A の k -基底となる。

(iii) $\text{Spec } A$ の孤立特異点は有理特異点である。

証明略 (Miyanishi-Russell, Purely inseparable coverings of exponent one of the affine plane, J. Pure Appl. Algebra 28 (1983), 279-317 参照)。

この補題を完備化した環に適用する。 $u, v, \zeta \in k[[S, T]]^D$ で、 $k((u, v, \zeta)) = k((S^p, T^p, S/T^e))$ であるから、補題 2.8.(2) より $\{T^{-\alpha p + \beta e} S^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta > 0, -\alpha p + \beta e > 0\}$ は $k[[S, T]]^D$ の k -基底である。従って $k[[S, T]]^D / k[[S^p, T^p, T^e S]]$ の k -基底として $\{T^{-\alpha p + \beta e} S^{\beta + \eta p} \mid \alpha, \beta, \eta \in \mathbb{Z}, \eta > 0, 0 < \alpha < e, 0 < \beta < p, -\alpha p + \beta e > 0\}$ がとれる。これは $\{T^{-\alpha p + \beta e} S^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, 0 < \alpha < e, 0 < \beta < p, -\alpha p + \beta e > 0\}$ が $k[[S, T]]^D / k[[S^p, T^p, T^e S]]$ の $k[[S^p]]$ -基底であることを示している。 $T^{-\alpha p + \beta e} S^\beta = v^{-\alpha} \zeta^\beta$ であることに注意すると、 $\mathcal{H}_Q = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{L, Q} v^{-\alpha} \zeta^\beta$ であることがわかる。ここで α と β は $0 < \alpha < e, 0 < \beta < p, -\alpha p + \beta e > 0$ となる整数全体を渉る。一方、 $\mathcal{H}|_{L^0} = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_{L^0} Z^{-\alpha} \eta^\beta$ であることをすでにみた。ここで α と β は上と同じもので、 $L^0 = L - \{Q \in L \mid \pi^+(Q) \text{ は特異点}\}$ である。 $Z^{-\alpha} \eta^\beta = v^{-\alpha} \zeta^\beta u^{\alpha - \beta m}$ であることに注意すると、 \mathcal{H} の $U_X \cap U_Y$ 上の変換関数は $\{u^{\alpha - \beta m}\}$ であることがわかる。よって次の結果を得る。

定理 2.9. $\varphi: X \rightarrow A^2$ は仮定 B を満たし、 $e \neq 1$ とする。

L 上の局所自由 \mathcal{O}_L -加群 $\mathcal{H} = \bigoplus_{\alpha, \beta} \mathcal{O}_L(\alpha - \beta m)$ を考える。ここで α と β は $0 < \alpha < e, 0 < \beta < p, -\alpha p + \beta e > 0$ なる整数全体を渉る。このとき \mathbb{P}^2 上の次の列は完全列である。

$$0 \longrightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X \longrightarrow \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

系 2.10. 定理と同じ仮定、同じ記号の下で次が成立する。

$$\chi(\mathcal{O}_Y) = p - \frac{3}{4}p(p-1)m + \frac{1}{12}p(p-1)(2p-1)m^2 + \sum_{\alpha, \beta} (\alpha - \beta m + 1)。$$

証明は補題 2.8.(3) より \tilde{Y} は有理特異点しかもたないことからすぐにわかる。

以上、無限遠直線で分岐する A^2 上の AS 被覆 π について、 π が仮定 A 又は仮定 B をみたす場合に、その非特異完備化 \bar{Y} の Euler 数 $\chi(\mathcal{O}_{\bar{Y}})$ を求める公式を与えたが、同じ仮定の下で \bar{Y} の標準因子 $K_{\bar{Y}}$ も記述することができる。([2] 参照)

文 献

- [1] Y. Takeda, Artin-Schreier coverings of algebraic surfaces, J. Math. Soc. Japan 41 (1989) 415-435.
- [2] Y. Takeda, Etale Galois coverings of degree p of the affine plane, to appear in J. algebra.